

# **“Sur l’Étude locale des Ensembles Analytiques Complexes”**

---

## **THÈSE**

PRÉSENTÉE

à la Faculté des Sciences de l’Université de Nancy

POUR L’OBTENTION

du Doctorat de Spécialité (Mathématiques-3<sup>ème</sup> Cycle)

par

**GÉRARD CŒURÉ**

Soutenue le 1<sup>er</sup> Octobre 1958, devant la Commission d’Examen

---

Président..... MM. J. DELSARTE

Examineurs ..... { HERVE  
A. ARAGNOL



UNIVERSITE de NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : E. URION

Assesseur : M. ECHEVIN

Doyens honoraires : MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE.

Professeurs honoraires : MM. DARMOIS E, GUTTON, CROZE, DARMOIS G, RAYBAUD, FALLLOT, LAFFITE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, CODEMONT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, DEMALLEMANN, LONGCHAMBON.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. RUAUX, LIENHART.

- P R O F E S S E U R S -

|               |                  |          |                        |
|---------------|------------------|----------|------------------------|
| MM. CORNUBERT | Chimie organique | WAHL     | Chim. org. ind.        |
| CHEVALLIER    | Physique         | BARRIOL  | Chimie théorique       |
| URION         | Chimie biol.     | BIZETTE  | Physique               |
| DELSARTE      | Analyse sup.     | GUILLEN  | Electronique           |
| REMY          | Zoologie         | GILBERT  | Génie chimique         |
| ROUBAULT      | Géologie         | HERVE    | Calcul diff. et intég. |
| N...          | Chimie minér.    | LEGRAS   | Mécanique rationnelle  |
| GUERIN        | Chimie ind.      | CHAPELLE | Physique               |
| N...          | Chimie phys. él. | DAVID    | Chimie biol.           |
| VEILLET       | Biologie anim.   | BOLFA    | Minéralogie            |
| N...          | Math. appliquées | NICLAUSE | Chimie                 |
| ECHEVIN       | Botanique        | FAIVRE   | Phys. appliquée        |



M A I T R E S de C O N F E R E N C E S

|          |                 |            |                      |            |              |
|----------|-----------------|------------|----------------------|------------|--------------|
| WERNER   | Botanique       | DUVAL      | Chimie               | KERN       | Minér.       |
| AUBRY    | Chimie          | SADRAN     | Géochimie            | WEPPE      | Minér. appl. |
| FRULING  | Radiotechnique  | CHAPON     | Chim. biol.          | BETBARD    | Géologie     |
| GAYET    | Physiologie     | HADNI      | Physique             | LERMUSTAUX | Phys. appl.  |
| COMOLET  | Mécan. phys.    | Mme ROIZEN | Physique             | ARAGNOL    | M.P.C.       |
| MANGENOT | Phytopathologie | HILLY      | Géol. de la Lorraine |            |              |
| LIONS    | M.M.P.          |            |                      |            |              |
| GARNIER  | Agronomie       | MALAPRADE  | Chimie               |            | Secrétaire   |
| BRUHAT   | Maths. géné.    | REGNIER    | Chimie minér.        |            |              |
| COPPENS  | Radiogéologie   | LE GOFF    | Génie chim.          |            | M. LAPOINTE. |



Qu'il me soit permis d'exprimer à Monsieur M. HERVÉ  
toute la reconnaissance que je lui dois pour la façon dont il  
m'a guidé tout au long de ce travail, et pour les multiples  
améliorations dont ce mémoire lui est redevable.

Je remercie les Professeurs qui ont accepté de  
composer le Jury auquel cette thèse a été soumise.



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41555808\\_0036](https://archive.org/details/IA41555808_0036)

CONFÉRENCES DE MONSIEUR LE PROFESSEUR HERVÉ

SUR LES ENSEMBLES ANALYTIQUES

On rappellera en préliminaire certains résultats indispensables  
à l'étude des Ensembles Analytiques.

Énoncé des principales propriétés des idéaux de fonctions  
holomorphes

On désignera par  $H_n$  l'anneau des fonctions de  $n$  variables  
complexes holomorphes à l'origine.

THEOREME 1

$H_n$  est un anneau d'intégrité.

THEOREME 2

$H_n$  est un anneau noëthérien.

THEOREME 3

$H_n$  est un anneau arithmétique.



PROPOSITION 1

Soit  $A$  un anneau d'intégrité.

a) Si  $J$  est un idéal dans l'anneau  $A[x]$  des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans  $A$ , il existe un polynôme  $Q(x)$  fixe  $\in J$ , possédant la propriété suivante :

à tout  $P(x) \in J$  correspond  $b_p$  non nul  $\in A$  tel que  $b_p \cdot P(x)$  soit divisible par  $Q(x)$  dans  $A[x]$ .

b) Si  $J$  a une base finie,  $b_p$  est indépendant du polynôme  $P$  pris dans  $J$ .

Démonstration

Soit  $K$  le corps des quotients associé à  $A$ . Lorsque  $\alpha \in K$  et  $P \in J$ ,  $\alpha \cdot P$  appartient à un idéal de  $K[x]$  qui a une base formée d'un seul élément  $\alpha \cdot P_1$ .

Donc quel que soit  $P$  dans  $J$  :  $P = P_1 \cdot \frac{Q}{a}$  où  $a \in A$ ,  $a$  dépendant de  $P$ . Ce qui démontre le a).

Mais si  $J$  a une base finie formée des polynômes  $Q_1, \dots, Q_r, P_1$  divisant  $b_{Q_1} \cdot Q_1, \dots, b_{Q_r} \cdot Q_r, P_1$  divise  $b \cdot Q_i$ , avec  $b = b_{Q_1} \dots b_{Q_r}$

$$\text{et } 1 \leq i \leq r$$

donc  $P_1$  divise  $b \cdot P$  quel que soit  $P$  dans  $J$ .



### Définition d'un Ensemble Analytique

Un ensemble  $G$  contenu dans un ouvert  $D$  de  $C^n$  sera dit

"Analytique" si :

Quel que soit  $A \in D$ ,  $\exists$  un voisinage  $V(A)$  de  $A$  tel que

$G \cap V(A)$  soit l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes sur  $V(A)$ .

Un point  $M \in G$  sera dit ordinaire si  $\exists$  un voisinage  $V(M)$  de  $M$  et une application analytique de  $V(M)$  dans  $C^n$  possédant les propriétés suivantes :

son jacobien  $\neq 0$  au point  $M$

$M \longrightarrow$  origine

$G \cap V(M) \longrightarrow U(0) \cap H_c^m$ , où  $U(0)$  est un voisinage de l'origine

où  $H_c^m$  est un hyperplan de dimension

complexe  $m : 0 \leq m \leq n$

### Conséquences

a)  $G$  est fermé dans  $D$ .

b) L'ensemble des points ordinaires de  $G$  est ouvert dans  $G$

c) Définition

Si  $M$  est ordinaire,  $m$  s'appelle la dimension

de  $G$  en  $M$



d) La dimension de  $G$  sur l'ensemble des points ordinaires est constante sur toute partie connexe de cet ensemble.

\* \* \*

Enoncé des propriétés des Ensembles Analytiques admises dans la  
suite de l'exposé

A tout Ensemble Analytique  $M$ , supposé contenir l'origine de  $C^n$ , on peut associer l'idéal  $J$  de fonctions holomorphes, défini comme suit :

$f \in J$ , si et seulement si il  $\exists$  un voisinage  $U$  de l'origine, dépendant de  $f$ , tel que :

$f$  soit holomorphe dans  $U$  et nulle sur  $U \cap M$ .

#### THEOREME 2'

Si l'on identifie 2 ensembles analytiques qui coïncident dans un voisinage de l'origine, il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante d'Ensembles Analytiques contenant l'origine.

#### Définitions

-  $M$  est dit irréductible, si  $M = \bigcup_{i \in I} M_i \Rightarrow M = M_{i_0}$ ,  
 $i_0 \in I = (1, \dots, n)$

- un idéal  $J$  est dit premier, si  $f \cdot g \in J \Rightarrow f \in J$  ou  $g \in J$



THEOREME

$M$  irréductible en  $O \iff J$  : premier.

THEOREME 3'

$M$  est décomposable d'une façon minimale unique en un nombre fini de composantes irréductibles dont il est la réunion.

La décomposition est minimale si  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$  avec  $M_i \not\subset M_j$ ,  
pour tout  $i$  et  $j \in I$ .

\*\*\*\*\*



Etude de l'ensemble analytique  $M_1$ , défini par :  $f = 0$ ,  $f \in H_n$ ,

dans le voisinage de l'origine

### Remarque

Tout point qui n'annule pas toutes les dérivées partielles d'ordre un est ordinaire.

$f$  n'étant pas  $= 0$ , il  $\exists$  un système d'hyperplans de coordonnées tels que  $f(0, 0, \dots, 0, x_n) \neq 0$

Le théorème préparatoire de Weierstrass permet, après ce choix de repère, de mettre  $f$  sous la forme :

$$f = P(x_n) \cdot h$$

où  $P(x_n)$  est un polynôme en  $x_n$  de degré  $k \gg 1$

où  $h$  est une fonction holomorphe non nulle à l'origine donc dans un voisinage de l'origine.

### PROPOSITION 2

Quel que soit le repère répondant aux conditions d'application du Th. préparatoire de Weierstrass,  $k$  est borné supérieurement.

### Démonstration

$f(x_1, \dots, x_n)$  est développable en série de deux façons au voisinage de l'origine.

$$\text{D'une part : } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^p$$



D'autre part  $f$  est développable en série de polynômes homogènes, développement qui est intrinsèque :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{p=\infty} Q_p(x_1, \dots, x_n)$$

Toujours d'après le Th. préparatoire de Weierstrass, si  $k$  est le degré de  $P$ ,

$$a_0(o) = \dots = a_{k-1}(o) = 0$$

$$a_k(o) \neq 0$$

$$\text{donc } Q_0(o, \dots, o, x_n) = \dots = Q_{k-1}(o, \dots, o, x_n) = 0$$

$$Q_k(o, \dots, o, x_n) \neq 0$$

$$\text{donc si } \Pi \text{ est le plan complexe d'équations } \begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1} = 0 \text{ sur } \Pi$$

$$Q_k = 0 \text{ seulement à l'origine sur } \Pi$$

Si  $k$  n'était pas borné, il existerait une suite infinie de repères  $R_p$  telle que :

$$k_p < k_{p+1}$$

$$Q_0, \dots, Q_{k_p-1} = 0 \text{ sur } \Pi_p$$

$$Q_{k_p} = 0 \text{ seulement à l'origine sur } \Pi_p$$

$$\text{Soit } M_k \text{ l'ensemble analytique défini par : } \begin{cases} Q_0 = 0 \\ \dots \\ Q_{k-1} = 0 \end{cases}$$

$$M_{k_p+1} \subseteq M_{k_p} \text{ et } M_{k_p} \supset \Pi_p, \quad M_{k_p+1} \cap \Pi_p = \{0\}$$



Démontrons que l'égalité d'inclusion est impossible

Si  $M_{k_p+1} = M_{k_p}$ ,  $\Pi_p \subset M_{k_p} \Rightarrow \Pi_p \subset M_{k_p+1}$ , ce qui est impossible car :  $M_{k_p+1} \cap \Pi_p = \{0\}$  Donc  $M_{k_p+1} \subset M_{k_p}$  ce qui est impossible car on aurait une suite strictement décroissante d'ensembles analytiques (théorème 2')

Ce qui démontre qu'il n'existe pas une suite  $k_p$  strictement croissante ; donc  $k$  est borné supérieurement.

#### Propriétés de $M_1$

Soit  $X(x_1, \dots, x_{n-1}) \in C^{n-1}$ ,  $X$  sera appelé le support du point  $(X, x_n) \in C^n$ .

a) Tout point  $X$  appartenant à un voisinage de l'origine dans  $C^{n-1}$ , est le support de  $k$  points de  $M_1$  distincts ou non.

Ces  $k$  points  $\rightarrow 0$  lorsque  $X \rightarrow 0$

b) Si  $V$  est un voisinage de l'origine :

$V - (V \cap M_1)$  est partout dense dans  $V$

c)  $V - (V \cap M_1)$  est connexe

d) Toute fonction holomorphe est bornée sur  $V - (V \cap M_1)$  se prolonge sur tout  $V$

#### Démonstration

Etant donné  $r' > 0$ ,  $\exists$  un polydisque  $v$  fermé de centre  $0$ ,  $\subset C^{n-1}$



et de rayon tel que si  $X \in v$ , les  $k$  racines de  $P$  sont en module  $< r'$

$$\text{Soit } V \subset \mathbb{C}^n \quad \left\{ \begin{array}{l} X \in v \\ |x_n| < r' \end{array} \right. ; \text{ et } F(X, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\substack{z = x_n \\ |z| = r'}} \frac{f(X, z)}{z - x_n} dz$$

$F(X, x_n)$  est holomorphe sur  $V$ .

Or pour  $X$  fixé,  $f(X, z)$  est holomorphe pour  $|z| \leq r'$  sauf en  $k$

points ; comme  $f$  est bornée,  $f(X, z)$  est prolongeable en ces  $k$  points.

Donc si  $(X, x_n) \in V - (V \cap \Pi_1) : F(X, x_n) = f(X, x_n)$

$F(X, x_n)$  prolonge bien  $f$  à tout  $V$ .

\*\*\*\*\*



## Etude d'un Ensemble Analytique M irréductible

à l'origine

Soit  $J$  l'idéal associé à  $M$ .Construction d'un système de coordonnées

$J \neq \{0\}$  ; donc  $\exists f \in H_n$  et  $\neq 0$  dans un voisinage de l'origine, par conséquent  $\exists A$  dans ce voisinage avec  $f(A) \neq 0$  ; on peut donc choisir le  $n^e$  plan de coordonnées de façon que  $f(0, \dots, x_n) \neq 0$

Soit  $J_1$  l'idéal des fonctions de  $J$  ne dépendant que de  $x_1, \dots, x_{n-1}$

Si  $J_1 \neq \{0\}$   $f_1(x, \dots, x_{n-1}) \in J_1$  et  $\neq 0$ . On peut comme précédemment choisir le  $(n-1)^e$  plan de coordonnées de façon que  $f_1(0, \dots, 0, x_{n-1}) \neq 0$ .

En poursuivant cette construction on ne peut arriver à  $J_{n-1} \neq \{0\}$  car  $J$  serait identique à  $H_n$  et  $M = \{0\}$  ou bien  $J$  serait l'idéal des fonctions de  $H_n$  nulles à l'origine, et  $M = \{0\}$

Il existe donc  $m$  tel que :  $J_{n-m} = \{0\}$  avec  $0 < m \leq n-1$

$$J_{n-p} \neq \{0\} \quad n \geq p > m$$

et dans chaque  $J_{n-p}$ ,  $\exists f_{n-p}$  tel que :  $f_{n-p}(0, \dots, 0, x_p) \neq 0$

On remarque que toute fonction ne dépendant que de  $x_1, \dots, x_m$

et  $\in J$ , est  $= 0$ . On posera dans la suite :  $X = (x_1, \dots, x_n)$



sera le support de  $X$ .

Conséquence du choix de ce repère.

Le Th. préparatoire de Weierstrass appliqué aux fonctions  $f_i$  précédentes permet d'affirmer qu'il y a un polynôme distingué dans chaque idéal  $J_i$ ,  $0 \leq i \leq n-m-1$

Comme  $J$  est premier,  $J_1, \dots, J_{n-m-1}$ , sont aussi premiers et les anneaux quotients  $H_{n-1} / J_1, H_{n-2} / J_2, \dots, H_{m+1} / J_{n-m-1}$  sont des anneaux d'intégrité.

Soit  $J'_{n-p-1}$  l'ensemble des polynômes de  $H_p[x_{p+1}]$  qui  $\in J_{n-p-1}$  ; c'est un idéal dans  $H_p[x_{p+1}]$ .

Comme  $H_p$  est un anneau nothérien, le théorème de Hilbert permet d'affirmer que les idéaux  $J'_{n-p-1}$  ont une base finie. Il existe une base contenant au moins un polynôme distingué  $Q_{n-p-1}$ , à savoir le polynôme distingué associé à  $f_{n-p-1}$ .

#### COROLLAIRE

$J_{n-p-1}$  et  $J'_{n-p-1}$  ont une même base.

D'après le Th. préparatoire de Rückert, si  $g \in H_{p+1}$   
 $g = h \cdot Q_{n-p-1} + Q$  où un polynôme  $\in H_p[x_{p+1}]$ ; et si  $g \in J_{n-p-1}$ ,  
 $Q \in J'_{n-p-1}$  c.q.f.d.

#### Etude de $J$ relatif à $J_1$

L'anneau d'intersection  $H = H_{n-1} / J_1$  est isomorphe à  $H_p[x_{p+1}]$  sur



$H_{n-1} / J_1 \{x_n\}$  et transforme  $Q \in J'$  en  $\tilde{Q} \in H_{n-1} / J_1 \{x_n\} \cdot Q$   
 variera dans un idéal  $\tilde{J}' \in H_{n-1} / J_1 \{x_n\}$ ;  $\tilde{J}'$  aura une base finie,  
 transformée canonique de la base de  $J'$

D'après la proposition 1,  $\exists P \in \tilde{J}'$  et  $\alpha \in H_{n-1} / J_1$  tel que

$\alpha$  . un polynôme qgc. de  $\tilde{J}'$  soit indivisible par  $\tilde{P}$

$\alpha$  est fixe  $\neq 0$

Par l'application canonique :

$\alpha$  est l'image de  $\varphi \in H_{n-1}$ ;  $P$  est l'image de  $P \in J'$

Comme  $\alpha \neq 0$  dans  $H_{n-1} / J_1$ ,  $\varphi \notin J_1$

L'égalité (I) devient donc :

$\varphi$  . un polynôme qgc. de  $J' = P$  . polynôme de  $H_{n-1} \{x_n\}$  + combinaison

linéaire finie d'éléments de  $J_1$

Comme  $J$  a une base formée de polynômes :

$\varphi$  . une fonction qgc. de  $J = P$  . fonction de  $H_n$  + combinaison

linéaire finie d'éléments de  $J_1$

où  $P \in H_{n-1} \{x_n\} \cap J = J'$

$\varphi \in H_{n-1}$ , mais  $\notin J_1$

#### Conséquences

a) En intégrant les coefficients de  $P$  qui  $\in J_1$  dans la combinaison linéaire, on peut supposer qu'aucun coefficient de  $P$  n'est dans  $J_1$ .



b) Cette hypothèse étant faite,  $d^0 P \geq I$ .

En effet si  $d^0 P = 0$ ,  $Q_0$  appartenant à  $J'$  et étant distingué, tous les coefficients de  $\varphi \cdot Q_0$  seraient dans  $J_1$ , comme  $\varphi \notin J_1$  tous les coefficients de  $Q_0 \in J_1$  et la constante 1 serait dans  $J_1$ , ce qui est impossible car  $J$  serait identique à  $\Pi_n$ .

c) Tout zéro commun à  $P$  et aux fonctions de  $J_1$  qui n'annule pas  $\varphi$  annule toute fonction  $f \in J$ .

d) De l'égalité (I) on déduit que tout polynôme de  $J$  dont au moins un des coefficients  $\notin J_1$  est de  $d^0 \geq d^0 P$ .

Etude de  $J_{n-p-1}$  relativement à  $J_{n-p}$

---

$1^0 \ n-1 \geq p > m$

Le même raisonnement qui conduit l'étude de  $J$  relativement à  $J_1$ , permet d'affirmer :

$$P_{n-p-1} \in J_{n-p-1} \cap H_p \{x_{p+1}\} = J'_{n-p-1}, \text{ et } \varphi_{n-p-1} \in H_p \\ \text{et } \notin J_{n-p} \text{ tel que :}$$

I')

$\varphi_{n-p-1}$  une fonction qgc. de  $J_{n-p-1} =$  une combinaison linéaire finie de  $P_{n-p-1}$  et d'éléments de  $J_{n-p}$ , à coefficients dans  $\Pi_{p+1}$



avec les propriétés :

a) Aucun coefficient de  $P_{n-p-1}$  n'appartient à  $J_{n-p}$ .

b)  $k_{n-p-1} = d^0 P_{n-p-1} \geq 1$

c) Tout zéro commun à  $P_{n-p-1}$  et aux fonctions de  $J_{n-p}$ , qui n'annule pas  $P_{n-p-1}$ , annule toute fonction  $f \in J_{n-p-1}$ .

d) Tout polynôme de  $J_{n-p-1}$  dont au moins un des coefficients

$\notin J_{n-p}$  est de  $d^0 \geq d^0 P_{n-p-1}$ .

2°  $p = m$

$J_{n-m} = \{0\}$ , et  $H_m/J_{n-m} = H_m$

Considérons l'idéal  $J'_{n-m-1} = J_{n-m-1} \cap H_m[x_{m+1}]$ , et le corps

des quotients  $K_m$  de l'anneau  $H_m$ .

$J'_{n-m-1}$ , considéré comme appartenant à  $K_m[x_{m+1}]$ , a une base formée

d'un polynôme  $P'_{n-m-1}$ .

Soit  $J$  le P.G.C.D. des coefficients de  $P'_{n-m-1} : P_{n-m-1}$ .  $J$

Comme  $J \neq 0$ ,  $J \notin J_{n-m}$ ; comme  $J \cdot P_{n-m-1} \in J_{n-m-1}$  est premier,

$P_{n-m-1} \in J_{n-m-1}$ , avec  $P_{n-m-1}$  primitif.

#### Conséquences

a)  $P_{n-m-1}$  divise dans  $H_m[x_{m+1}]$  tout polynôme de  $J'_{n-m-1}$ .

Ceci résulte immédiatement du fait que  $P_{n-m-1}$  divise dans  $K_m[x_{m+1}]$  tout polynôme de  $J'_{n-m-1}$  et que  $P_{n-m-1}$  est primitif.



$$b) k_{n-m-1} = d^0 P_{n-m-1} \gg 1.$$

Sinon  $P_{n-m-1}$  serait dans  $H_m$  donc dans  $J_{n-m}$ , et  $P_{n-m-1} \equiv 0$ .

$J'_{n-m-1}$  serait vide, ce qui est impossible puisque le choix du repère permet d'affirmer qu'il contient un polynôme distingué.

c)  $P_{n-m-1}$  divise dans  $H_{m+1}$  une fonction qqc. de  $J_{n-m-1}$  :

On applique a) en remarquant que  $J'_{n-m-1}$  et  $J_{n-m-1}$  ont une même base.

En définitive on obtient les polynômes remarquables  $P_i$  ( $0 \leq i \leq n-m-1$ ) dans  $J_i$ , de degré  $\geq 1$  et dont aucun des coefficients n'est dans  $J_{i+1}$  ; ainsi que  $n-m-1$  fonctions  $\rho_i \in H_{n-i-1} - J_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq n-m-2$ ).

### PROPOSITION 3

Etant donné un polynôme  $R(x_{n-i}) \in H_{n-i-1} - J_i$ , il existe une fonction  $\rho \in H_{n-i-1} - J_{i+1}$  telle que, si  $\rho \neq 0$ , tout zéro de  $P_i$  qui annule les fonctions de  $J_{i+1}$  n'annule pas  $R(x_{n-i})$ .

### Définition

$\rho$  sera appelée fonction résiduelle des polynômes  $P_i$  et  $R(x_{n-i})$

### Démonstration

Nous noterons par  $R^*(x_{n-i})$  le polynôme  $\neq 0$  transformé de  $R(x_{n-i})$  par suppression des monômes dont les coefficients sont dans  $J_{i+1}$ .

$$b_0^\alpha \cdot P_i = R^* \cdot Q + R_1 \quad d^0 R_1 < d^0 R$$



$$b_1^{\alpha} \cdot P_i = R_1^* \cdot Q_1 + R_2 \quad d^{\circ} R_2 < d^{\circ} R_1^* < d^{\circ} R$$

.....

$$b_h^{\alpha} \cdot P_i = R_h^* \cdot Q_h + R_{h+1} \quad R_{h+1} \in H_{n-i-1}$$

où j'ai supposé  $d^{\circ} R \leq d^{\circ} P_i$ , et où  $b_0, b_1, \dots, b_h$  sont les coefficients de la plus haute puissance de  $R^*, R_1^*, \dots, R_h^*$ ;  $\alpha$  le degré de  $P_i$ ; aucun des  $b \in J_{i+1}$  par construction.

$$a) \quad R_{h+1} \notin J_{i+1}$$

En effet : il y a au moins un des coefficients de  $Q$  qui  $\notin J_{i+1}$ , car sinon le coefficient de la plus haute puissance de  $b_0^{\alpha} \cdot P_i \in J_{i+1}$ , ce qui est impossible d'après la propriété des  $b$  et la propriété a) de  $P_i$

$d^{\circ} Q < d^{\circ} P_i$  et tous les coefficients de  $Q$  ne sont pas dans  $J_{i+1}$ ,

donc d'après la propriété d)  $Q \notin J_i$ , il en est de même pour  $R_1$  donc pour  $R_1^*$ ; on peut donc continuer le raisonnement de proche en proche jusqu'à  $R_{h+1}$ .

b) Soit tout zéro de  $R$  qui annule les fonctions de  $J_{i+1}$  annule  $R^*$ ,

tout zéro commun à  $P_i$  et  $R$  qui annule les fonctions de  $J_{i+1}$ , annule  $R_{h+1}$ .

La fonction  $p$  est donc  $R_{h+1}$ .

#### Remarque

Si  $d^{\circ} R > d^{\circ} P$ , il suffit de poser  $b^{\alpha} \cdot R = P_i \cdot Q + R_1$  (où  $b$  est le coefficient de la plus haute puissance de  $P_i$  et où  $\alpha$  est le  $d^{\circ}$  de  $R$ ) et, en considérant le couple  $(P_i, R_1)$ , on est ramené au cas précédent.



Application

Le polynôme  $P_i$  n'ayant aucun de ses coefficients dans  $J_{i+1}$ , il en est de même pour le polynôme dérivé  $P_i'$ . Comme  $d^0 P_i' \subset d^0 P_i$  la propriété d) des  $P_i$  montre que  $P_i' \notin J_{i+1}$ .

On appellera dans la suite  $J_i$  une fonction résiduelle de  $P_i'$  et  $P_i$ , multipliée au besoin par le coefficient de la plus haute puissance dans  $P_i$ .

$$J_i \notin J_{i+1}$$

LEMME I

Tout point de  $M$  annule les polynômes  $P_i$ , et réciproquement tout zéro commun aux  $P_i$  qui n'annule aucune fonction  $\varphi_i$  appartient à l'ensemble  $\Pi$ .

Démonstration

La première partie est immédiate puisque les  $P_i \in J$ .

Soit  $A$  un zéro commun aux  $P_i$ .  $A$  annule  $P_{n-m-1}$ , base de  $J_{n-m-1}$ ,  $A$  annule donc toute fonction de  $J_{n-m-1}$ .  $A$  annule toute fonction de  $J_{n-m-1}$  et  $P_{n-m-2}$  sans annuler  $\varphi_{n-m-2}$ , d'après (II').  $A$  annule toute fonction de  $J_{n-m-2}$ . En remontant ainsi les idéaux dans l'ordre des indices décroissants, on arrive au fait que  $A$  annule  $P$  et les fonctions de  $J_1$  sans annuler  $\varphi$ .

$A$  annule donc toute fonction de  $J$ .

LEMME 2

Il existe dans  $C^m$  un ensemble analytique  $\mu$  possédant les propriétés



suivantes : pour chaque  $i$ , ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ), un zéro commun aux fonctions de  $J_i$ , dont le support  $\notin \mu$ , n'annule pas  $\mathcal{J}_{i-1} \cdot \varphi_{i-1}$  ; en outre les points qui  $\notin \mu$  n'annulent pas  $\mathcal{J}_{n-m-1}$ .

### Démonstration

Il existe dans  $J_1$  un polynôme distingué  $Q_1$  et d'après le Th. préparatoire de Rückert :

$$\mathcal{J} \cdot \varphi = Q_1 \cdot h_1 + R_1 ; \text{ où } \mathcal{J} \cdot \varphi \notin J_1, \text{ donc } R_1 \in H_{n-2}$$

$x_{n-1}$  mais  $\notin J_1$ . Soit  $p_1$  une fonction résiduelle des polynômes  $P_1$  et  $R_1$  ; la proposition 3 montre que  $p_1 \notin J_2$  et que tout zéro commun à  $R_1$  et aux fonctions de  $J_1$  annule  $p_1$ .

Un zéro commun aux fonctions de  $J_1$  et à  $\mathcal{J} \cdot \varphi$  annule  $R_1$  donc  $p_1$

En conclusion un zéro commun aux fonctions de  $J_1$  qui n'annule pas  $p_1$  n'annule pas  $\mathcal{J} \cdot \varphi$

Comme  $p_1 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot \varphi_1 \notin J_2$ , on peut faire le même raisonnement à partir de  $p_1 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot \varphi_1$  en posant :  $p_1 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot \varphi_1 = Q_2 \cdot h_2 + R_2$

Si  $p_2$  est fonction résiduelle de  $P_2$  et  $R_2$ ,  $p_2 \notin J_3$ , un zéro commun aux fonctions de  $J_2$  qui n'annule pas  $p_2$  n'annule pas  $p_1 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot \varphi_1$

En descendant ainsi la suite des idéaux, on arrive à une fonction

$p_{n-m-1} \notin J_{n-m}$ , donc  $p_{n-m-1} \neq 0$ , telle qu'un zéro commun aux fonctions de  $J_{n-m-1}$  qui n'annule pas  $p_{n-m-1}$  n'annule pas  $p_{n-m-2}$ .



### Propriétés des coordonnées de ces k points

- 1° Elles sont des fonctions localement holomorphes de  $\xi$ , lorsque  $\xi$  n'appartient pas à  $\mu$ .
- 2° Elles sont bornées dans le complémentaire de  $\mu$ .
- 3° Elles tendent vers 0 quand  $\xi$  tend vers 0 sur le complémentaire de  $\mu$ .

### Démonstration

Soit un point  $\xi \notin \mu$ ,  $J_{n-m-1}(\xi) \neq 0$ , il résulte donc de la proposition 3 que  $P_{n-m-1}(\xi, x_{m+1})$  a ses  $k_{n-m-1}$  racines distinctes et finies. Soit  $x_{m+1}^0$  un des zéros de  $P_{n-m-1}$ ;  $(\xi, x_{m+1}^0)$  est un zéro commun aux fonctions de  $J_{n-m-1}$ , dont le support n'est pas dans  $\mu$ , il résulte du lemme 2 que  $(\xi, x_{m+1}^0)$  n'annule ni  $J_{n-m-2}$ , ni  $\varphi_{n-m-2}$ ; le polynôme  $P_{n-m-2}(\xi, x_{m+1}^0, x_{m+2})$  a donc ses  $k_{n-m-2}$  racines distinctes et finies.

Soit  $x_{m+2}^0$  un des zéros de  $P_{n-m-2}(\xi, x_{m+1}^0, x_{m+2})$ . Selon (II'), le point  $(\xi, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0)$ , n'annulant pas  $\varphi_{n-m-2}$ , annule toute fonction de  $J_{n-m-2}$  .....

On trouve finalement un nombre constant de points distincts deux à deux, car deux d'entre eux ont toujours pour construction une coordonnée distincte.

Ce nombre constant k est égal au produit :  $k_{n-m-1} \cdot k_{n-m-2} \cdots k_0$

des degrés des polynômes  $P_i$ .



On obtient tous les points de  $M$  dont le support est  $\xi$ , car le procédé ci-dessus épuise tous les zéros communs aux polynômes  $P_i$  et seul un zéro commun aux polynômes  $P_i$  peut  $\in M$ .

### Propriétés relatives aux coordonnées

1° Puisque  $\Delta_{n-m-1} \neq 0$ , le discriminant de  $P_{n-m-1}$  n'est pas nul en  $\xi$ ,  $x_{m+1}^0$  est donc une fonction localement holomorphe des coefficients de  $P_{n-m-1}$ , donc de  $\xi$ .

Pour les mêmes raisons  $x_{m+2}^0$  est une fonction localement holomorphe du couple  $(\xi, x_{m+1}^0)$ , donc de  $\xi$ . On remonte ainsi jusqu'à  $x_n^0$ .

2° Le point  $(\xi, x_{m+1}^0)$  annule le polynôme distingué  $Q_{n-m-1} \in J'_{n-m-1}$ ;

$x_{m+1}^0$  est une quelconque des racines de  $Q_{n-m-1}$ , dont tous les coefficients sont holomorphes, et, sauf le premier qui est 1, tendent vers 0 avec  $\xi$ . Toutes les racines de  $Q_{n-m-1}$  sont donc bornées et tendent vers 0 avec  $\xi$ , donc en particulier  $x_{m+1}^0$ . En remontant ainsi jusqu'à  $x_n^0$  on démontre que les coordonnées des  $k$  points  $X_i(\xi)$  sont bornées dans le complémentaire de  $\mu$  et tendent vers 0 quand  $\xi$  tend vers 0 sur le complémentaire de  $\mu$ .

### Notation

On note dans la suite  $\mathbb{H}$ , le lieu des points  $X_1(\xi), X_2(\xi), \dots, X_k(\xi)$  dans  $C^n$ , lorsque  $\xi$  décrit le complémentaire de  $\mu$  dans  $O^m$ .

Chaque point de  $\mathbb{H}$  est un point ordinaire de dimension  $m$ .



LEMME 5

Toute fonction de  $H_n$  qui s'annule sur  $\mathbb{H}$ , s'annule sur  $\Pi$ ,  
c'est-à-dire  $\in J$ .

Démonstration

Supposons que  $f$  s'annule sur  $\mathbb{H}$  et que  $f \notin J$ .

Selon le Th. préparatoire de Rückert :  $f = Q \cdot h + R$  ; où  $Q$  est

un polynôme distingué de  $J$

$R \in H_{n-1}[x_n]$  mais  $\notin J$

Selon la proposition 3 une fonction résiduelle  $f_1$  des polynômes

$R$  et  $P$  n'appartient pas à  $J_1$ .

Tout point de  $\mathbb{H}$  annule  $f$ ,  $Q$  et  $P$  donc simultanément  $R$  et  $P$ .  $f_1$

s'annule donc sur  $\mathbb{H}$ .

En recommençant ce raisonnement à partir de  $f_1$ , et en descendant

dans la suite des idéaux, on obtient une fonction  $f_{n-m} \in H_m$ , nulle sur  $\mathbb{H}$  et

$\notin J_{n-m}$ .

$f \notin J_{n-m}$  n'est pas identiquement nulle, mais en revanche, comme

elle s'annule sur l'ouvert  $\mathcal{O}_\mu$ , elle doit s'annuler partout, ce qui est

contradictoire.



LEMME 6

A toute fonction  $f \in H_n$  et telle que  $f(0) = 0$ , correspond un polynôme distingué  $R(\xi, z) \in H_m[z]$ , de degré  $k$  (le même  $k$  qu'au lemme 4), tel que :  $R(\xi, f) \in J$ .

Démonstration

Comme les coordonnées des points de  $H$  sont des fonctions de  $\xi$  localement holomorphes dans le complémentaire de  $\mu$ , les fonctions  $f[X_1(\xi)]$ , ...,  $f[X_k(\xi)]$  ont cette même propriété.

Les fonctions symétriques élémentaires :

$$s_1(\xi) = \sum_{i=1}^k f[X_i(\xi)]$$

.....

sont holomorphes sur  $C\mu$ .

$$s_k(\xi) = f[X_1(\xi)] \dots f[X_k(\xi)]$$

La propriété 2 du lemme 4 implique que ces  $k$  fonctions sont bornées dans le voisinage de l'origine.

Si on applique à  $\mu$  la propriété d) démontrée sur l'ensemble analytique  $M_1$ , on trouve finalement que les fonctions  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , sont holomorphes au voisinage de l'origine. La propriété 3 du lemme 4 implique en plus qu'elles sont nulles à l'origine.

Le polynôme suivant est donc distingué :

$$\begin{aligned} R(\xi, z) &= z^k - s_1 z^{k-1} + \dots + (-1)^k s_k \\ &= (z - f[X_1(\xi)]) \cdot (z - f[X_2(\xi)]) \dots (z - f[X_k(\xi)]) \end{aligned}$$



On constate que  $R(\xi, f)$  s'annule sur  $\mathbb{H}$ , donc sur  $M$  d'après le lemme 5.

Le polynôme  $R$  a donc bien la propriété de l'énoncé.

#### LEMME 7

$M$  est l'adhérence de  $\mathbb{H}$ .

#### Démonstration

Comme  $\mathbb{H}$  est contenu dans  $M$ , qui est fermé, il suffit de montrer qu'un point  $X_0$  de  $M$ , n'appartenant pas à  $\mathbb{H}$ , est adhérent à  $\mathbb{H}$ .

Soit  $\xi_0$  le support de  $X_0$ .

Montrons que l'ensemble d'accumulation des points  $X_1(\xi), \dots, X_k(\xi)$

lorsque  $\xi \longrightarrow \xi_0$  a un nombre fini de points.

Appliquons le lemme 6 en prenant  $f = x_i$  ( $m+1 \leq i \leq n$ ).

Il existe un polynôme distingué  $R_i(\xi, z)$  tel que  $R_i(\xi, x_i)$  s'annule sur  $M$ , donc sur  $\mathbb{H}$ . Les  $i^{\text{es}}$  coordonnées  $x_i$  des points  $X_1(\xi), \dots, X_k(\xi)$  sont racines du polynôme  $R_i(\xi, z)$ ; le théorème sur la continuité des racines d'un polynôme distingué implique que l'ensemble d'accumulation des  $x_i$  a, au plus,  $k$  points qui sont les racines de  $R_i(\xi_0, z)$ . Ce qui prouve que l'ensemble d'accumulation des points  $X_1(\xi), \dots, X_k(\xi)$ , lorsque  $\xi \longrightarrow \xi_0$ , a un nombre fini de points.

Soit  $\{\tilde{X}_j\}$  cet ensemble d'accumulation.



Il faut montrer que  $X_0$  est parmi les  $\tilde{X}_j$ . Supposons le contraire :

$$X_0 \neq \tilde{X}_j \text{ q.q. soit } j.$$

Il existe alors une forme linéaire  $u$  en  $x_{m+1}, \dots, x_n$ , telle que  $u(X_0)$  soit  $\neq u(\tilde{X}_j)$ , pour tout  $j$ .

Soit  $R(\xi, u)$ , le polynôme du lemme 6 correspondant à  $f = u$ . Les racines de  $R(\xi_0, u)$  sont les limites des racines de  $R(\xi, u)$ , lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$  à l'extérieur de  $\mu$ ; ce sont donc les  $u(\tilde{X}_j)$ . Mais  $X_0$  étant dans  $\Pi$ ,  $u(X_0)$  est une racine de  $R(\xi_0, u)$ , et  $u(X_0)$  est un des  $u(\tilde{X}_j)$ , ce qui est contraire au choix de  $u$ .

#### Conséquences du lemme 7

- 1° Les points ordinaires de  $M$  sont partout denses sur  $M$ .
- 2° Il se peut qu'un point ordinaire de  $M \in M - M$ . Mais comme la dimension est continue sur l'ensemble des points ordinaires de  $M$  et que les points ordinaires de  $M - M$  sont adhérents à  $M$ , tous les points ordinaires de  $\Pi$  sont de dimension  $m$ .

3° On peut maintenant définir la dimension en un point quelconque  $A$  d'un ensemble analytique irréductible ou non :

$$\dim. (A) = \overline{\lim.}_{\substack{B \text{ ordinaire sur } M \\ B \longrightarrow A}} \dim. (B).$$



PROPOSITION

Après un changement de coordonnées convenable, il existe dans l'anneau  $H_n[x_n]$  un polynôme distingué et irréductible, de degré  $k$ , (celui du lemme 4), appartenant à  $J$ .

Démonstration

A chaque  $\xi \in \mu$  correspondent  $k$  points de  $H$  deux à deux distincts ; on peut donc, par un changement de coordonnées n'altérant pas  $x_1, \dots, x_m$ , faire que leurs  $n^{\text{es}}$  coordonnées  $x_n^1(\xi), \dots, x_n^k(\xi)$  soient deux à deux distinctes pour un point  $\xi$ .

Considérons le polynôme distingué  $R(\xi, x_n)$  correspondant à  $f = x_n$  ; il est de degré  $k$  ; montrons qu'il est irréductible dans  $H_n[x_n]$ .

Dans le cas contraire :

$$R(\xi, x_n) = R_1(\xi, x_n) \cdot R_2(\xi, x_n) \in J$$

Comme  $J$  est premier, un de ces polynômes, qui est de degré  $\leq k-1$ ,  $\in J$ , les  $k$  nombres  $x_n^1(\xi), \dots, x_n^k(\xi)$  en sont donc des racines, ce qui est impossible puisqu'il est au plus de degré  $k-1$ .

$R(\xi, x_n)$  est donc irréductible.



THEOREME

Pour tout  $i$  ( $m+1 \leq i \leq n-1$ ), il existe un polynôme  $\in H_m \{x_n\}$ , de degré  $\leq k-1$  :  $S_i(\xi, x_n)$ , tel que  $M$  soit l'adhérence de l'ensemble  $E$  des points de  $C^n$  vérifiant les relations :

$$(E) \quad R(\xi, x_n) = 0, \quad R'(\xi, x_n) \neq 0$$

$$R'(\xi, x_n) \cdot x_i - S_i(\xi, x_n) = 0 \text{ pour chaque } i.$$

1° Soit  $x_n^j(\xi)$  la  $n^e$  composante du point  $X_j(\xi)$  de  $H$  de support  $\xi$ , ( $j = 1, \dots, k$ ).

$$\frac{R(\xi; x_n)}{x_n - x_n^j(\xi)} = \prod_{j' \neq j} \left[ x_n - x_n^{j'}(\xi) \right] : \text{polynôme de d° } k-1, \text{ dont les}$$

coefficients sont localement holomorphes, bornés et  $\rightarrow 0$ , avec  $\xi$  sur  $C^m$ .

Etant donnée  $f \in H_n$ , et nulle à l'origine, posons :

$$S_f(\xi; x_n) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{R(\xi; x_n)}{x_n - x_n^j(\xi)} \cdot f(X_j(\xi));$$

$S_f \in H_m \{x_n\}$ ; en effet ses coefficients sont des fonctions symétriques des

$x_n^j(\xi)$  et des  $X_j(\xi)$ , donc des fonctions localement holomorphes de  $\xi$

sur  $C^m$ , comme ils sont en plus bornés sur un voisinage de l'origine dans

$C^m$ , ils sont localement holomorphes de  $\xi$ , dans ce voisinage.

$$\lim_{x_n \rightarrow x_n^{j_1}(\xi)} \text{ de } \frac{R(\xi; x_n)}{x_n - x_n^j(\xi)} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq j_1 \\ R'(\xi; x_n), & \text{si } j = j_1 \end{cases}$$



Par conséquent :

$$S_f \left\{ \xi ; x_n^{j_1} (\xi) \right\} = R' \left\{ \xi ; x_n^{j_1} (\xi) \right\} \cdot f \left\{ x_{j_1} (\xi) \right\}, \text{ et}$$

$R' (\xi ; x_n) \cdot f(X) - S_f (\xi ; x_n)$  s'annule sur  $\mathbb{H}$ , donc d'après le lemme 5, sur  $\mathbb{M}$ , cette fonction est donc dans  $J$ .

Il suffit de prendre  $f = x_i$  pour trouver le polynôme  $S_i$  de l'énoncé du théorème.

$$2^\circ \quad \overline{E} \subset M$$

Soit  $X_0$  un point de  $E$ , de support  $\xi_0$ , dont la  $n^c$  coordonnée est  $x_n^0$ ;  $x_n^0$  est un des zéros de  $R(\xi_0 ; x_n)$ .

On peut trouver  $\xi$  arbitrairement voisin de  $\xi_0$  et extérieur à  $\mu$ ; les  $n^{\text{es}}$  coordonnées  $x_n^j(\xi)$  des  $k$  points de  $\mathbb{H}$ ,  $X_j(\xi)$ , sont les  $k$  racines de  $R(\xi ; x_n)$ . L'ensemble d'accumulation, lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$ , des  $k$  nombres  $x_n^j(\xi)$  forme l'ensemble des racines de  $R(\xi_0 ; x_n)$ ;  $x_n^0$  appartient donc à cet ensemble d'accumulation.

On peut donc trouver  $X \in \overline{\mathbb{H}}$ , ayant même support et même  $n^c$  coordonnée que  $X_0$ .

Montrons que  $X$  et  $X_0$  sont confondus, ce qui démontrera que  $E \subset \overline{\mathbb{H}}$ , donc  $\overline{E} \subset M$  puisque  $M$  est fermé.

$$\text{Pour } X_0 : S_i(\xi_0 ; x_n^0) = x_i^0 \cdot R'(\xi_0 ; x_n^0) : \text{définition de } E$$

$$\text{Pour } X : S_i(\xi_0 ; x_n^0) = x_i \cdot R'(\xi_0 ; x_n^0) : \text{d'après I -}$$

Comme, sur  $E$ ,  $R' \neq 0$ ,  $x_i = x_i^0$  pour tout  $i$ ;  $X$  et  $X_0$  sont donc confondus.



3°  $M \subset \bar{E}$

Si  $X_0$ , de support  $\xi_0$ ,  $\in H$  et si le discriminant  $J(\xi_0)$  de  $R$  est  $\neq 0$ , d'une part  $X_0$  annule toute fonction de  $J$  et en particulier  $R$  et  $R' x_i - S_i$ , d'autre part  $R' \neq 0$ .  $X_0$  est donc sur  $E$ .

On sait qu'il  $\exists \xi_1$  tel que tous les points de  $H$  de support  $\xi_1$  ont les  $n^{es}$  coordonnées deux à deux distinctes ;  $J(\xi) \neq 0$ . Par conséquent, si  $J(\xi_0) = 0$  et si  $\xi_0 \notin \mu$ , on peut trouver  $\xi$  non dans  $\mu$  avec  $J(\xi) \neq 0$ , arbitrairement voisin de  $\xi_0$ . D'après le début du 3° tous les points de  $H$  de support  $\xi$  sont dans  $E$ , comme  $X_0$  est la limite de l'un de ces points lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$  à l'extérieur de  $\mu$  et de l'ensemble analytique  $J(\xi) = 0$ ,  $X_0$  est adhérent à  $E$ .

$M$  est donc contenu dans  $\bar{E}$ .

Le théorème est démontré.



Cas particuliers où la détermination de M est facile

1°  $k = 1$

$R(\xi; x_n) = x_n^{-h}(\xi)$ ; le discriminant de R n'est jamais nul.

E coïncide avec M.

$S_i(\xi; x_n)$  est de degré 0,  $S_i = h_i(\xi)$

$$E \begin{cases} x_n = h(\xi) \\ x_i = h_i(\xi) \quad m \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

M est donc défini paramétriquement par ces fonctions de  $\xi$  et

tout point de M est ordinaire.

2°  $\dim. M = 0$

J contenant un monôme en  $x_1$  et  $n-1$  polynômes distingués en  $x_2, \dots, x_n$  respectivement,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  sur M. M se réduit donc à l'origine.

Un ensemble analytique de dimension 0 à l'origine admet l'origine

pour point isolé.

3°  $k \geq 2, \quad m = 1$

est une variable complexe.

a) Le discriminant  $J(\xi)$  de  $R(\xi; x_n)$  est nul à l'origine car  $R(0; x_n) = x_n^k$ .

Dans un voisinage de l'origine, le seul zéro de  $J(\xi)$  est l'origine.



D'après 3° Page 29 :  $M = E \cup \{0\}$

b)  $R(\xi; x_n)$  étant irréductible et de degré  $k$  ses racines sont des fonctions holomorphes de  $\xi^{1/k}$

$$x_n = h_n(\xi^{1/k})$$

$$x_i = \frac{S_i(\xi^{1/k}; h_n(\xi^{1/k}))}{R(\xi^{1/k}; h_n(\xi^{1/k}))} = h_i(\xi^{1/k})$$

$h_i$  étant méromorphe de  $\xi^{1/k}$  dans un voisinage de l'origine et bornée puisque  $x_i$  l'est,  $h_i$  est donc holomorphe de  $\xi^{1/k}$ .

M est donc susceptible d'une représentation paramétrique et tous

ses points sont ordinaires, sauf peut-être l'origine.

#### Application

$n = 2$  ;  $m = 1$  ou  $0$ .

Un ensemble analytique dans  $C^2$  est soit réduit à des points isolés, soit susceptible d'une représentation paramétrique au voisinage d'un point non isolé.

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*



Etude de l'ensemble analytique  $M \cap (f = 0)$

où  $f$  est une fonction de  $H_n$  ne s'annulant pas identiquement

sur l'ensemble analytique  $M$ , irréductible à l'origine.

\*\*\*\*\*

Soient  $J, J_1, \dots, J_{n-m-1}, J_{n-m} = \{0\}$ , les idéaux associés à  $M$  ;

soient  $J^*, J_1^*, \dots, J_{n-m}^*$ , les idéaux associés à  $M \cap \{f = 0\}$  pour un même choix

de coordonnées.

#### LEMME 1

Si  $f \notin J, J_{n-m}^* \neq \{0\}$ .

#### Démonstration

L'étude de  $M$  a montré l'existence d'un polynôme  $R_f(\xi; z)$ , tel que  $R_f(\xi; f) \in J$ . La fonction holomorphe  $R_f(\xi; 0) \in J^*$ , donc  $J_{n-m}^*$ .

Pour montrer que  $J_{n-m}^* \neq \{0\}$ , il suffit donc de prouver que

$$R_f(\xi; 0) \neq 0$$

$$\text{Posons } R_f(\xi; z) = z^k + \dots + a_1(\xi)z + a_0(\xi)$$

$$\text{Si } R_f(\xi; 0) = 0 = a_0(\xi), \text{ d'une part : } f^{k-1} + \dots + a_1(\xi) \in J$$

d'autre part q.q. soit  $\xi \notin \mu$  il  $\exists X_\xi \in \mathbb{H}$ , tel

$$\text{que } f(X_\xi) = 0.$$

Ce qui entraîne que  $a_1(\xi)$  s'annule dans un voisinage de l'origine

sur  $C^m - \mu$ , donc sur  $C^m$ . En poursuivant ce raisonnement  $R_f(\xi; f)$  se ré-

duirait à  $f^k$ , et  $f \in J$ , ce qui est impossible.



$R_f(\{ ; 0)$  n'est donc pas identiquement nul, et  $J_{n-m}^* \neq \{0\}$ .

## LEMME 2

Soit  $N$  une composante irréductible de  $M \cap \{f = 0\}$ ; comme la décomposition de  $M \cap \{f = 0\}$  est supposée propre, il existe un point de  $N$  extérieur aux autres composantes et arbitrairement voisin de l'origine.

Donc  $\exists X_0 \in N$  et  $V(X_0)$ , voisinage de  $X_0$ , tel que  $N \cap V(X_0) = M \cap \{f = 0\} \cap V(X_0)$ .

### (A) Etude de $M$ au voisinage de $X_0$

$M \cap V(X_0)$  pouvant être réductible, soient  $M_i$  les composantes irréductibles de  $M \cap V(X_0)$ , elles sont de dimension  $m$ , car tous les points ordinaires de  $M$  le sont.

$$N \cap V(X_0) = \bigcup \{M_i \cap \{f = 0\}\} \text{ d'après le lemme 2.}$$

$$\text{Posons } N_i = M_i \cap \{f = 0\}$$

$$X_0 \in \bigcap N_i$$

Soit  $\tilde{J}_{n-m}$  l'idéal associé à  $N$  des fonctions  $\in H_m$ ;  $J_{n-m}^* \subset \tilde{J}_{n-m}$ , le lemme 1 entraîne donc que  $\tilde{J}_{n-m} \neq \{0\}$ .

$\tilde{J}_{n-m}$  n'étant pas réduit à 0, il existe une fonction holomorphe  $p(f)$  s'annulant sur  $N$ , donc sur  $N \cap V(X_0)$  donc sur chaque  $N_i$ . Les idéaux  $\tilde{J}_{n-m}^i$  associés au point  $X_0$  aux  $N_i$  ne sont donc pas réduits à 0.



(B) Etude de  $N_i$ 

L'étude d'un ensemble analytique irréductible à l'origine, conduit à des résultats qui sont, après une translation, applicables à tout ensemble analytique irréductible au voisinage d'un point quelconque. Ceci ayant lieu sans changement du repère, en effet :

Si dans chaque idéal  $\tilde{J}_p$  ( $n-m-1 \geq p \geq 0$ ), on peut trouver un polynôme distingué  $Q_p \in H_{n-p-1}[x_{n-p}]$ , le changement de variable  $X = X_0 + Y$  transforme  $Q_p$  en un polynôme  $\in H_{n-p-1}[y_{n-p}] \cap \tilde{J}_p^i$  qui n'est pas identiquement nul lorsque les coordonnées de  $Y$  sont nulles sauf  $y_{n-p}$ , et qui peut donc donner naissance par le Th. préparatoire de Weierstrass à un polynôme distingué  $\in H_{n-p-1}[y_{n-p}] \cap \tilde{J}_p^i$ .

Il  $\exists \mu_i \subset \mathbb{C}^m$  tel que si  $\xi \in \mu_i \cap V(X_0)$ ,  $\xi$  est le support d'un nombre fini de points de  $M_i$ , soient  $X_j(\xi)$ , dont les coordonnées sont localement holomorphes au voisinage de  $\xi_0$  à l'extérieur de  $\mu_i$ , et sont de plus dans  $V(X_0)$ .

Il existe aussi un polynôme  $R_i^1(\xi; z)$ , distingué au voisinage de  $\xi_0$ , c.à d. dont les coefficients sont des fonctions nulles en  $\xi_0$  et holomorphes de  $\xi$  au voisinage de  $\xi_0$ , sauf celui de la plus haute puissance qui est 1. Ce polynôme est tel que ses racines soient les  $f[X_j(\xi)]$  si  $\xi \in \mu_i$  et tel qu'il appartienne à l'idéal de  $M_i$ .



Si  $\xi_1 \in \mu_i$  les racines de  $R_f^i(\xi_1; z)$  sont les  $f[\tilde{X}_j(\xi_1)]$ ;

$\tilde{X}_j(\xi_1)$  désignant les points d'accumulation des  $X_j(\xi)$  lorsque  $\xi \rightarrow \xi_1, \xi \notin$

$\mu_i$ . Ceci résulte de la continuité des racines du polynôme  $R_f^i(\xi; z)$ .

$R_f^i(\xi; 0) \neq 0$ . Dans le cas contraire tout point  $\xi$  voisin de  $\xi_0$  serait le support d'un point de  $N_i$ , et  $\tilde{J}_{n-m}^i = \{0\}$ ; ce qui est impossible d'après (A).

### LEMME 3

Si  $\xi$  est voisin de  $\xi_0$  et  $R_f^i(\xi; 0) = 0$ ,  $\xi$  est le support d'un point de  $N_i$ .

### Démonstration

En effet les racines de  $R_f^i(\xi; z)$  sont soit les  $f[X_j(\xi)]$ , soit les  $f[\tilde{X}_j(\xi)]$ , et l'une est nulle.

Il existe donc un point  $X_j(\xi)$  si  $\xi \in \mu_i$  ou un point  $\tilde{X}_j(\xi)$  si  $\xi \in \mu_i$ , qui annule  $f$ , donc qui  $\in N_i$ .

### Corollaire

Le support de  $\xi$  dans  $C^{m-1}$  sera noté  $\xi^*$ .

Après un choix convenable d'un repère de  $C^n$ , tout  $\xi^*$  voisin de  $\xi_0^*$  est le support d'un point de  $N_i$ .

### Démonstration

On peut trouver un repère de  $C^m$  tel que les zéros de  $R_f^i(\xi; 0)$



soient ceux d'un polynôme distingué en  $x_m$  à coefficients holomorphes de  $\xi^*$  au voisinage de  $\xi_0^*$ .

Etant donné  $\xi^*$  voisin de  $\xi_0^*$ , il existe donc une racine  $x_m(\xi^*)$  de ce polynôme, tendant vers la  $n^e$  composante de  $X_0$ , lorsque  $\xi^* \rightarrow \xi_0^*$ .

Il suffit d'appliquer le lemme 3 pour affirmer que le point  $[\xi^*, x_m(\xi^*)]$  de  $C^m$ , est le support d'un point de  $N_i$ .

#### THEOREME

$$\tilde{J}_{n-m+1}^i = \{0\}$$

#### Démonstration

Dans le cas contraire,  $\exists \varphi(\xi^*) \neq 0$  et  $\in \tilde{J}_{n-m+1}^i$ . Par conséquent  $\varphi(\xi) \in J_{n-m+1}^i$ , or tout point d'un voisinage de  $\xi_0^*$  dans  $C^{m-1}$  est support d'un point de  $N_i$ , donc  $\varphi(\xi^*) = 0$  dans ce voisinage de  $\xi_0^*$ , et en définitive  $\varphi(\xi^*) \equiv 0$  dans un voisinage de l'origine, ce qui est impossible.

$$\tilde{J}_{n-m+1}^i = \{0\}.$$

Ce qui prouve que  $N$  est de dimension  $m-1$ .

\*\*\*\*\*



# Définition intrinsèque de la dimension d'un ensemble analytique

Je supposerai  $m > 0$ .

1° Si  $M$  est irréductible à l'origine et de dimension  $m$  à l'origine, il existe un hyperplan  $H$  de dimension complexe  $n-m$ , passant par l'origine, tel que :

$$M \cap H = \text{origine}$$

Prenons pour l'hyperplan  $H$  celui d'équation  $\xi = 0$ , il est bien de dimension :  $n-m$

Montrons que  $M \cap H = \text{origine}$ .

Tous les points de  $M \cap H$  doivent annuler les polynômes distingués :

$$Q_i \in J \quad i = 0, 1, \dots, n-m-1$$

Pour tout point de  $M \cap H$

$$Q_{n-m-1}(\xi, x_{m+1}) \in J \cap H_m[x_{m+1}]$$

$$\text{Sur } M \cap H, Q_{n-m-1}(0, x_{m+1}) = x_{m+1}^{k_1} = 0$$

$$\text{donc } x_{m+1} = 0$$

$$Q_{n-m-2}(\xi, x_{m+1}, x_{m+2}) \in J \cap H_{m+1}[x_{m+2}]$$

$$\text{Sur } M \cap H, Q_{n-m-2}(0, 0, x_{m+2}) = x_{m+2}^{k_2} = 0$$

$$\text{donc } x_{m+2} = 0$$

Ce raisonnement se poursuit jusqu'à  $x_n = 0$

Ce qui prouve que  $M \cap H = \text{origine}$ .

2° Si  $H$  est tel que  $H \cap H = \text{origine}$ ,  $H$  est de dimension  $\leq n-m$ .



$$\text{donc } M \cap H = (\cup N_j) \cap H_1 = \cup (N_j \cap H_1)$$

$$\text{où dimension } N_j = m-1$$

$$\text{dimension } H_1 = n-p+1$$

$$N_j \text{ irréductible}$$

Pour que  $M \cap H$  soit réduit à l'origine, il faut et il suffit que chaque  $N_j \cap H_1$  soit réduit à l'origine.

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence, dimension } H_1 \leq n-(m-1)$$

$$\text{donc } n-p+1 \leq n-m+1$$

$$\text{et dimension } H = n-p \leq n-m \quad \text{c.q.f.d.}$$

Pour terminer le raisonnement il suffit de démontrer le théorème pour  $m = 1$ , ce qui est évident puisque dans  $C^n$  tout hyperplan est de dimension  $\leq n-1$ .

Ces deux théorèmes prouvent que la dimension d'un ensemble analytique irréductible à l'origine est le minimum des entiers  $p$  tels qu'il existe un hyperplan de dimension  $n-p$  coupant  $M$  uniquement à l'origine dans un voisinage de l'origine.



Raisonnons par récurrence sur la dimension  $m$  de  $M$ .

Supposons le théorème vrai pour tout ensemble analytique de dimension  $m-1$  dans  $C^n$ .

Soit  $M$  un ensemble analytique de dimension  $m$ , et  $H$  un hyperplan de dimension complexe  $n-p$  et tel que

$$M \cap H = \text{origine}$$

Les équations de  $H$  sont

$$L_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

où les  $L_i(X)$  forment  $p$  formes linéaires indépendantes

$$\exists L_{i_0}(X) \notin J$$

Si non tout point de  $M$ , annulerait tous les  $L_i(X)$  et appartiendrait par conséquent à  $H$ ,  $M \cap H$  dans un voisinage de l'origine ; or comme dimension  $M = m > 0$ ,  $M$  ne se réduit pas à des points isolés donc  $M \cap H$  ne se réduirait pas à l'origine

$$M \cap H = M \cap \{L_{i_0}(X) = 0\} \cap H_1$$

où  $H_1$ , obtenu à partir de  $H$  en supprimant une équation, est un hyperplan de dimension complexe  $n-p+1$ .

D'après un théorème démontré auparavant,  $M \cap \{L_{i_0}(X) = 0\}$  est un ensemble analytique dont toutes les composantes irréductibles  $N_j$  à l'origine sont de dimension  $m-1$



Analyse du contre-exemple de M. CARTAN, montrant qu'en général les polynômes  $Q_1, R, x_1, R'(x_n) - S_1(x_n)$ , n'engendrent pas l'idéal associé à M.

---

$n = 3$  ; variables  $x, y, z$ .

$$M \quad \left| \begin{array}{l} z = xy \\ x^p - y^q = 0 \end{array} \right. \quad (p \text{ et } q \text{ premiers entre eux})$$

1°  $z - xy, x^p - y^q$  forment une base de l'idéal J associé à M.

Soit  $f \in J$ . D'après le Th. préparatoire de Rückert :

$f = (z - xy) h_1 + R$  ; où R est une fonction de J ne dépendant que de  $x$  et  $y$ .

De même :  $R = (x^p - y^q) h_2 + T(y ; x)$  ; où  $T(y ; x)$  est un polynôme de  $d^0 < p$  en  $x$ , et appartenant à J.

Il existe  $p$  points dont les coordonnées sur l'hyperplan des  $x$  sont toutes distinctes, appartenant à M et admettant une coordonnée déterminée  $y_0 \neq 0$ .

Ce qui prouve que  $T(y_0 ; x)$  devrait avoir  $p$  racines distinctes, donc  $T \equiv 0$  et  $f = (z - xy) h_1 + (x^p - y^q) h_2$ .

2° M est irréductible

a) Montrons que M admet la représentation paramétrique :

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} x = t^q \\ y = t^p \end{array} \right.$$



Il suffit de montrer que pour tout point de  $M$  de coordonnées  $x, y, z$ , il existe  $t$  vérifiant (I).

Soient  $x_1, \dots, x_q$ , les  $q$  racines  $q^e$  de  $x$ . La condition nécessaire et suffisante pour que  $t^q - x$  et  $t^p - y$  aient une racine commune est :

$$(y - x_1^p) (y - x_2^p) \dots (y - x_q^p) = 0$$

Or comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, les fonctions **symétriques** élémentaires des quantités  $\sum_i x_i^p = x^p$  sont toutes nulles sauf  $\sum_i x_i = x$ .

La condition nécessaire et suffisante est donc :  $y^q - x^p = 0$

Pour tout point  $(x, y, z) \in M$ , il existe donc  $t$  tel que :

$$x = t^q,$$

$$y = t^p.$$

Comme sur  $M$ ,  $z = xy$ , la valeur  $t$  ci-dessus vérifie donc (I).

b)  $M$  est irréductible.

Il suffit de montrer que  $J$  est premier ; en effet :

si  $f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) \in J$ , alors :

$$f(t^q, t^p, t^{p+q}) \cdot g(t^q, t^p, t^{p+q}) \equiv 0$$

Ce qui entraîne que l'un des facteurs est identiquement nul et  $f$  ou  $g$  appartient à  $J$ .

3° Ordonnons maintenant les variables de façon que les fonctions de  $J$  ne dépendent pas de  $x \in$  à un idéal  $J_1$ , et considérons l'idéal  $J_1^1$  des polynômes de  $J_1 \in H_z[y]$ .



$xy - z$  est le polynôme  $P$  de  $J$  ; en effet  $y \notin J$  et  $P$  est de  $d^0$  1 en  $z$ .

L'idéal  $J_{n-m-1}$  de la théorie générale ne possède qu'un polynôme irréductible dans  $H_m[x_{m+1}]$  qui en est de plus la base.

Constatant que  $y^{p+q} - z^p \in J_1$  et est irréductible dans  $H_z[y]$ , on en déduit que  $Q_1 = P_1 = y^{p+q} - z^p$ .

#### Détermination du polynôme $R(z; x)$

Dans la théorie générale  $R(\xi; x_n)$  est le seul polynôme distingué de degré  $k$  que possède  $J$ , car sinon il posséderait un polynôme  $r(\xi; x_n)$  de degré  $< k$ , qui pour  $\xi \notin \mu$  devrait avoir  $k$  zéros, ce qui est impossible.

Dans l'exemple étudié la représentation paramétrique (I) montre qu'il existe  $p + q$  points de  $M$  dont les coordonnées en  $x$  sont distinctes et qui ont même coordonnée  $\neq 0$  en  $z$ .

D'autre part  $k = d^0 P$ .  $d^0 P_1 = 1$ .  $(p + q) = p + q$ .

En éliminant  $y$  entre  $Q = x^p - y^q$  et  $P$ , on obtient le polynôme cherché :  $R(z; x) = x^{p+q} - z^p$ .

#### Détermination du polynôme $S_y(x)$

La théorie générale a montré qu'il existe un polynôme  $S_i(x_n)$  en  $x_n$ , dont les coefficients sont des fonctions de  $\xi$ , tel que :

$$x_i \cdot R'(x_n) - S_i(x_n) \in J \text{ avec } d^0 S_i(x_n) < k$$

Montrons que ce polynôme est unique.



S'il en existait deux, leur différence serait un polynôme  $s(\xi; x_n)$  de degré  $< k$  et  $\in J$ , nous avons vu que c'était impossible.

$$\begin{aligned} \text{Dans l'ensemble étudié : } y \cdot R'(x_n) &= (p+q)x^{p+q-1} \cdot y \\ &= (p+q)x^{p+q-2} \cdot z \pmod{J} \\ &= S_y(x) \end{aligned}$$

$$y R'(x) - S_y(x) = (p+q)(xy - z)x^{p+q-2}.$$

---

Les polynômes :  $Q = x^p - y^q$

$$Q_1 = y^{p+q} - z^p$$

$$R(x) = x^{p+q} - z^q$$

$$(xy - z) x^{p+q-2}$$

engendrent-ils l'idéal  $J$  ?

Pour cela il faut et il suffit que  $z - xy$  se mette sous forme d'une combinaison linéaire de ces polynômes, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine.

On devrait donc pouvoir trouver quatre fonctions holomorphes  $A, B, C, D$ , au voisinage de l'origine, telles que :

$$z - xy = A(x^p - y^q) + B(y^{p+q} - z^p) + C(x^{p+q} - z^q) + D(xy - z)x^{p+q-2}.$$

Cette égalité doit en particulier avoir lieu sur un voisinage de l'origine de l'hyperplan  $x = 0$ . Donc :



$$z = -A(o,y,z)y^q + B(o,y,z)(y^{p+q}-z^p) - C(o,y,z)z^q \quad \text{ou}$$

$$z(1 + Bz^{p-1} + Cz^{q-1}) = y^q (By^p - A) ;$$

or, aucun des deux facteurs du 1er membre ne peut être divisé par  $y$ .

Ce qui prouve que les quatre polynômes avancés ne peuvent former une base de  $J$ .





VU et APPROUVÉ

NANCY, le

Le Doyen,

E. URION

Vu et Permis d'Imprimer

NANCY, le

Le RECTEUR

Président du Conseil

de l'Université

G. MAYER





